

Теория функций комплексного переменного

Комплéксные числа

- $z = x + iy$ -алгебраическая форма к.ч.

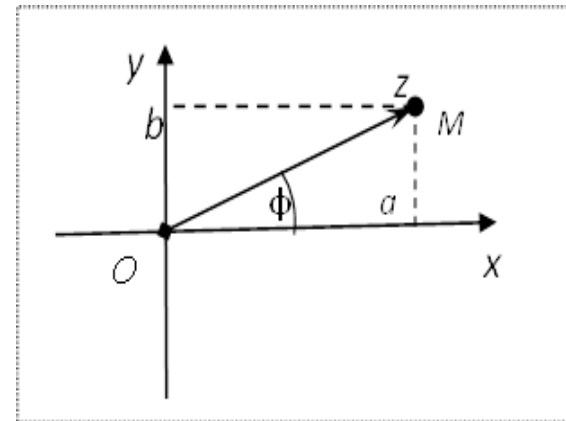
i -мнимая единица, $i^2 = -1$

$x = \operatorname{Re} z$ -действительная часть к.ч.

$y = \operatorname{Im} z$ -мнимая часть к.ч.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ -модуль к.ч.

$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ -аргумент к.ч.

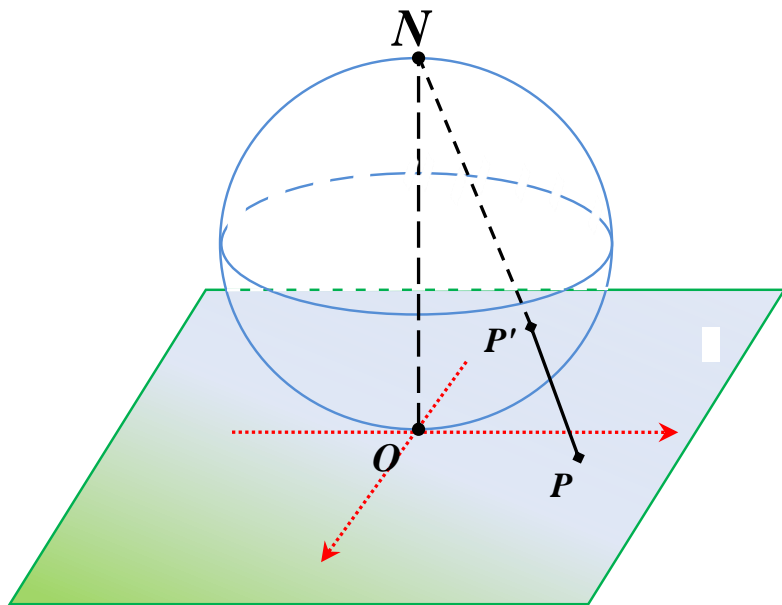


- $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ -тригонометрическая форма к.ч.

- $z = |z|e^{i\varphi}$ -показательная форма к.ч. $-\pi < \varphi \leq \pi$

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $e^{i\pi} + 1 = 0$

Сфера Римана (стереографическая проекция) комплексной плоскости



$z = \infty$ - бесконечно
удалённая точка

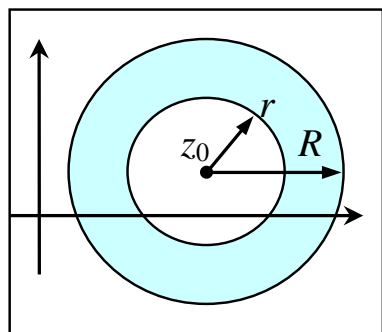
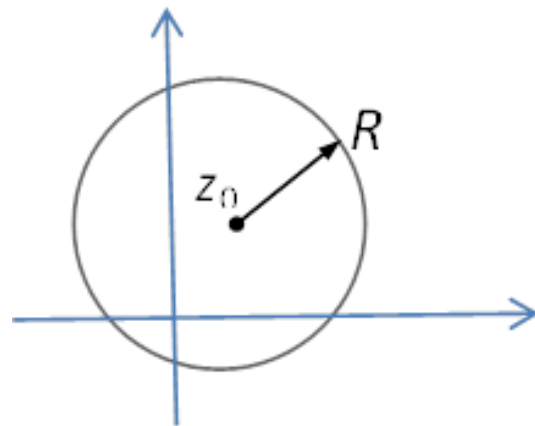
\mathbb{C} - комплексная плоскость

$\mathbb{C}^+ = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - расширенная

комплексная плоскость

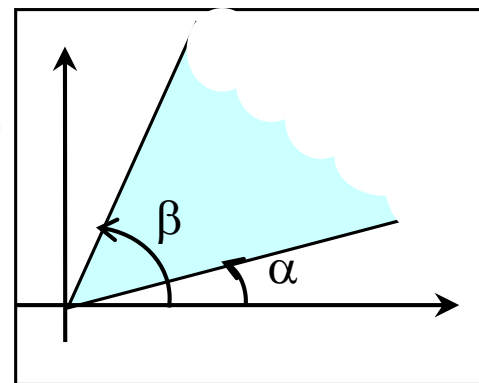
Линии и области в комплексной ПЛОСКОСТИ

$|z - z_0| = R$ -окружность радиуса R
с центром в точке z_0 ;

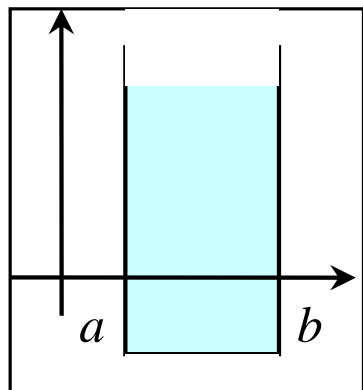


$r \leq |z - z_0| \leq R$ -кольцо;

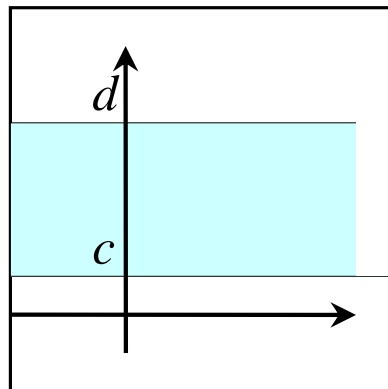
$\alpha \leq \arg z \leq \beta$
-угол



$a \leq \operatorname{Re} z \leq b$

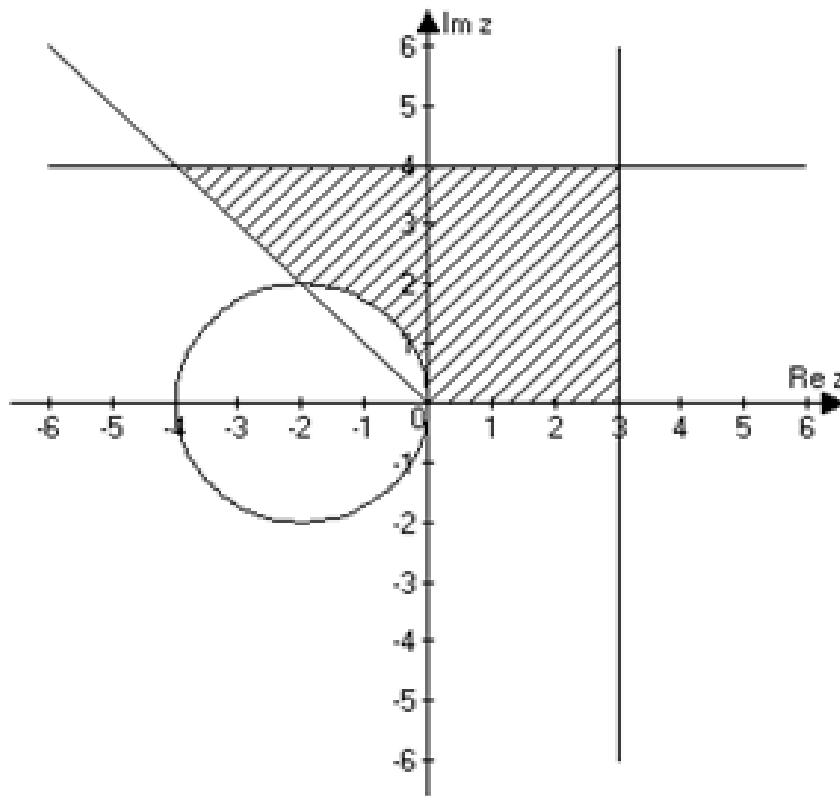


полоса



$c \leq \operatorname{Im} z \leq d$

- Изобразить на комплексной плоскости область, удовлетворяющую условиям $|z + 2| > 2$; $0 \leq \arg z < \frac{3\pi}{4}$; $\operatorname{Re} z \leq 3$; $\operatorname{Im} z \leq 4$.



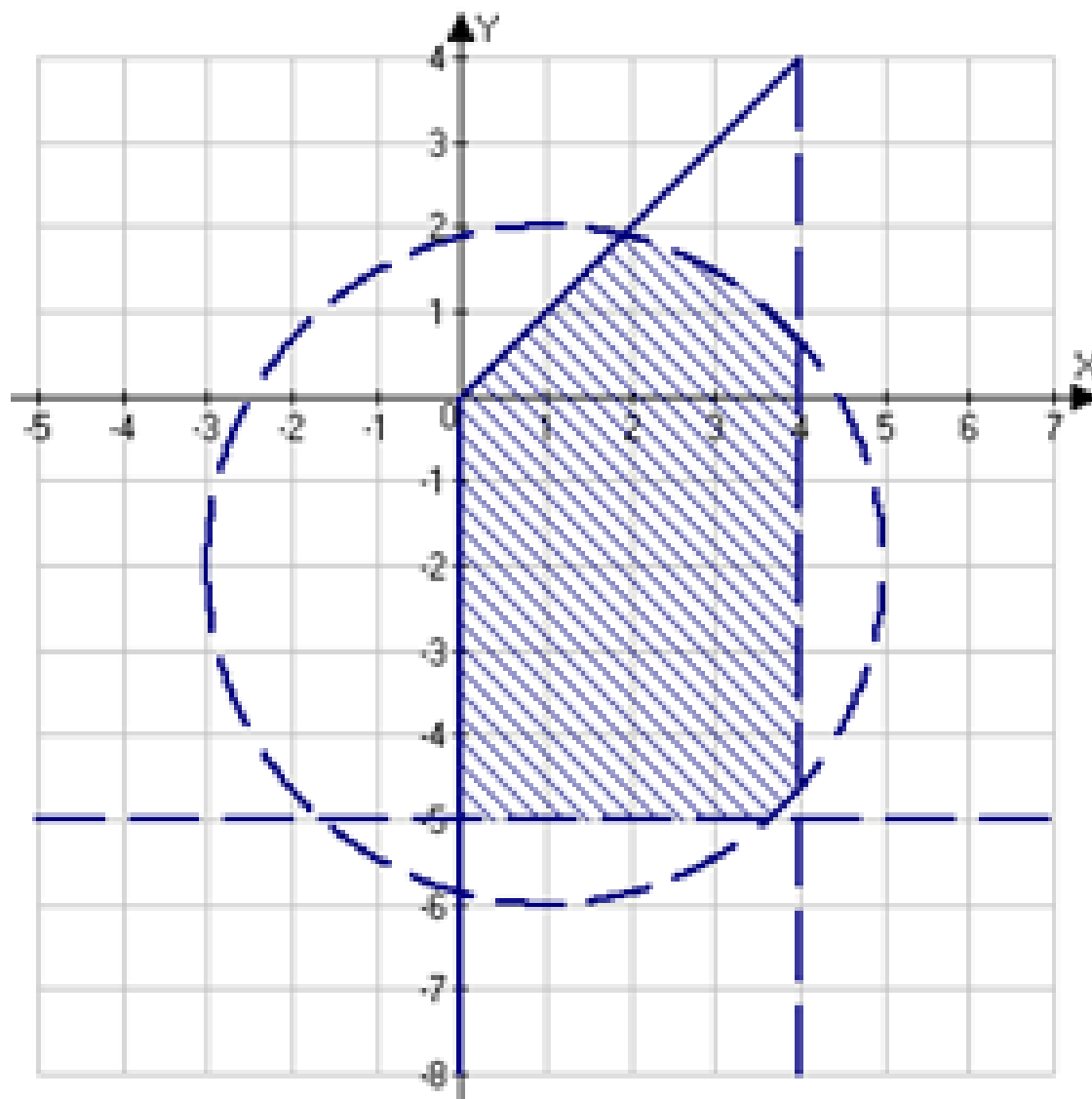
Изобразить область...

$$|z - 1 + 2i| < 4$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$$

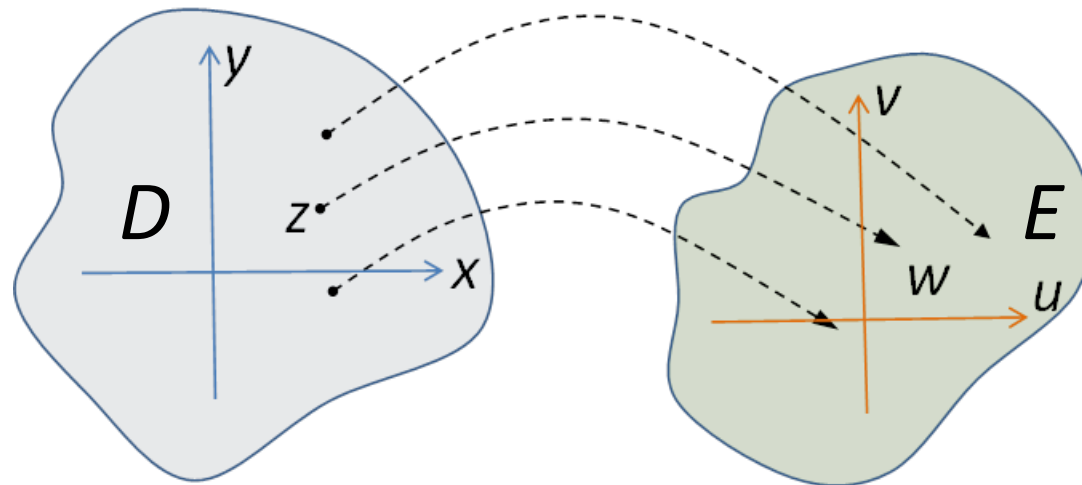
$$\operatorname{Re} z < 4$$

$$\operatorname{Im} z > -5$$



Функции комплексного переменного

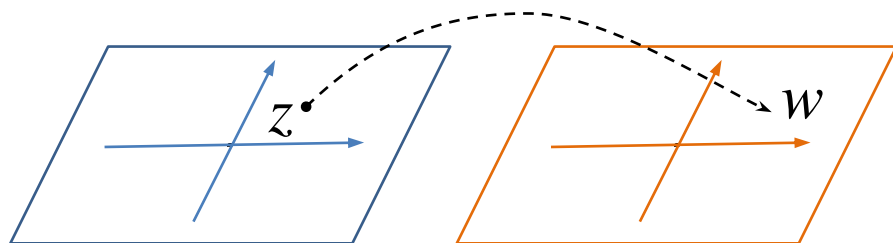
Определение. Если каждому числу (точке) $z \in D$ по некоторому правилу поставлено в соответствие число (точка) $w \in E$, то говорят, что на комплексной плоскости определена *функция комплексного переменного* $w = f(z)$, отображающая множество D в множество E .



D -область определения

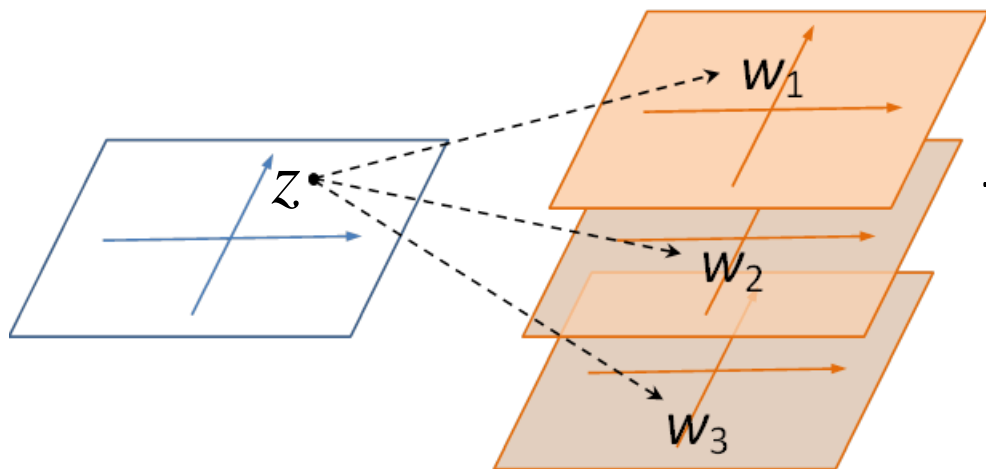
E -область значений

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv = w$$



-однозначная функция

пример: $f(z) = z^3$



-многозначная функция

пример: $f(z) = \sqrt[3]{z}$

Бесконечнозначная функция

$$w = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Квадратичная функция

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_u + i \underbrace{(2xy)}_v$$

- Инверсия относительно единичной окружности

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)}_u + i \underbrace{\left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)}_v$$

Предел и непрерывность ф.к.п.

Определение. Число w_0 называется *пределом функции* $w = f(z)$ в точке z_0 $\left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Это означает:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x; y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x; y) = v_0$$

Сохраняются все свойства пределов.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ непрерывна в точке z_0 , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f(z) = 0$$

Функция $f(z)$ непрерывна в области D , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сохраняются все свойства непрерывных функций.

Основные элементарные ф.к.п.

- Показательная функция $w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$

Свойства:

однозначная;

непрерывная;

периодическая: $e^{z+2\pi i} = e^z$, период $2\pi i$;

область определения и область значений – вся комплексная плоскость (исключение: $e^z \neq 0$).

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2};$$

$$e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1 - z_2};$$

$$(e^z)^n = e^{n \cdot z} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} e^z = 0;$$

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow +\infty)}} e^z = \infty;$$

• **Логарифмическая функция** $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$

Свойства:

обратная к показательной функции: $e^{\operatorname{Ln} z} = z$

область определения: $z \neq 0$

область значений: вся комплексная плоскость;

непрерывна при $z \neq 0$;

непериодическая;

бесконечнозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z \pm 2\pi n$;

главное значение $\ln z = \ln|z| + i \arg z$

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

- **Степенная функция** $w = z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \sin n\varphi)$

Свойства (для натурального n): $z^n = r^n e^{in\varphi}$

однозначная;

непрерывная;

область определения и область значений – вся комплексная плоскость;

непериодическая;

частный случай:

$$z^3 = (x + iy)^3 = \underbrace{(x^2 - 3xy^2)}_u + i \underbrace{(3x^2y - y^3)}_v$$

- **Степенная функция (извлечение корня)**

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right)$$

Свойства:

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

многозначная (n-значная);

непрерывная;

область определения – вся комплексная

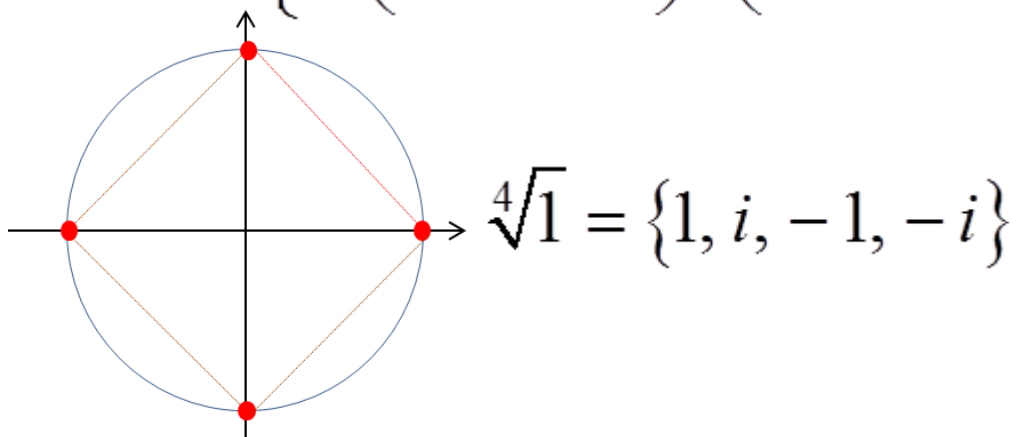
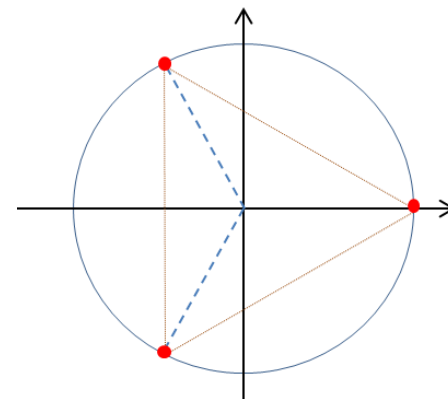
плоскость;

частный случай:

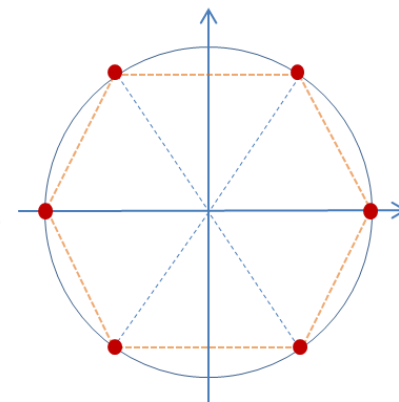
$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sqrt{|z|} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} - \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \pi \right) \right) \end{cases}$$

Корни степени n из единицы

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ 1, \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$



$$\sqrt[6]{1} = \left\{ 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$$



- **Общая степенная функция** $w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$

Свойства:

бесконечнозначная;

непрерывная;

область определения: $z \neq 0$;

пример:

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k} ;$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

главное значение: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,2079$

• Тригонометрические функции

Свойства: периодические;
однозначные;
неограниченные;

область определения:

для $\sin z$ и $\cos z$ – всё множество \mathbb{C} ,

для $\operatorname{tg} z$ $z \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi n$, период = π

для $\operatorname{ctg} z$ $z \neq \pi n$ период = π

непрерывные в обл. определения.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

**Сохраняются почти все свойства
тригонометрических функций.**

• Гиперболические функции

Свойства:

однозначные;

периодические (период $2\pi i$);

неограниченные;

область определения:

для $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ – всё множество \mathbb{C} ,

для $\operatorname{th} z$ $z \neq i\pi n$

для $\operatorname{cth} z$ $z \neq i\frac{\pi}{2} + i\pi n$

непрерывные в области определения.

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями

$$\operatorname{sh} iz = i \cdot \sin z, \quad \sin iz = -i \cdot \operatorname{sh} z, \\ \operatorname{ch} iz = \cos z; \quad \cos iz = \operatorname{ch} z.$$

$$\operatorname{tg} iz = i \cdot \operatorname{tg} z, \quad \operatorname{ctg} iz = -i \cdot \operatorname{ctg} z.$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Действительные и **мнимые** части
тригонометрических и гиперболических
функций

$$\sin z = \sin(x + iy) = \underbrace{\sin x \cdot \operatorname{ch} y}_u + i \underbrace{\cos x \cdot \operatorname{sh} y}_v$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \underbrace{\cos x \cdot \operatorname{ch} y}_u + i \underbrace{(-\sin x \cdot \operatorname{sh} y)}_v$$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + iy) = \underbrace{\operatorname{sh} x \cdot \cos y}_u + i \underbrace{\operatorname{ch} x \cdot \sin y}_v$$

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x + iy) = \underbrace{\operatorname{ch} x \cdot \cos y}_u + i \underbrace{\operatorname{sh} x \cdot \sin y}_v$$

- Обратные тригонометрические функции

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \cdot \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \cdot \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

Свойства: бесконечнозначность;
непрерывность;
всюду определенность;

главное значение:

$$\begin{aligned} \arcsin z &= -i \cdot \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \\ \arccos z &= -i \cdot \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad - \text{двузначные}$$

Вывод формулы для Арксинуса:

$$w = \operatorname{Arcsin} z; \quad \sin w = z; \text{ то есть } z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i};$$

тогда $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$;

Решаем это квадратное уравнение относительно e^{iw} и получим

$$e^{iw} = iz + \sqrt{(iz)^2 + 1};$$
$$iw = \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right);$$
$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Остальные формулы выводятся
аналогично.

Вывод предлагается
сделать самостоятельно.

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z} \quad (z \neq \pm i),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i} \quad (z \neq \pm i).$$

Свойства: бесконечнозначность;
непрерывность в области
определения;

- Обратные гиперболические функции

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \quad \text{- ареасинус}$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \text{- ареакосинус}$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} \quad \text{- ареатангенс}$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1} \quad \text{- ареакотангенс}$$

• **Пример 1.**

$$\begin{aligned} \text{Ln}(-2 + i\sqrt{12}) &= \ln \sqrt{4 + 12} + i \left(\frac{2}{3} \pi + 2\pi k \right) = \\ &= \ln 4 + i \left(\frac{2}{3} \pi \right) + i 2\pi k = (1,3863 + i \cdot 2,0944) + i \cdot 6,2832 \cdot k \end{aligned}$$

• **Пример 2.**

$$\begin{aligned} \text{Arctg} \frac{i}{2} &= -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{i - \frac{i}{2}}{i + \frac{i}{2}} = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1}{3} = \frac{i}{2} \text{Ln} 3 = \\ &= \frac{i}{2} (\ln 3 + 2\pi k i) = 2\pi k + i \ln \sqrt{3} = \\ &= 6,2832 \cdot k + (i \cdot 0,5493) \end{aligned}$$

Дифференцирование ф.к.п.

Пусть $w = f(z)$ однозначная, определенная в некоторой окрестности точки z , функция.

Определение. Производной функции $f(z)$ в точке z называется предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

если он существует.

Обозначение:

$$f'(z), \quad \frac{df}{dz}, \quad \frac{dw}{dz}.$$

Дифференцируемость \Rightarrow непрерывность,
(обратное – неверно).

Теорема Коши-Римана.

Пусть функция $w = u(x; y) + iv(x; y)$ определена в окрестности точки $(x; y)$, причем в этой точке $u(x; y)$ и $v(x; y)$ дифференцируемы. Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке *тогда и только тогда*, когда выполнены следующие условия Коши-Римана (Эйлера-Даламбера):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Доказательство. Необходимость:

Пусть производная $f'(z)$ существует, т.е. предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не зависит от того, как $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$. Тогда пусть $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x; y) + iv(x + \Delta x; y)) - (u(x; y) + iv(x; y))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x; y) - u(x; y)) + i(v(x + \Delta x; y) - v(x; y))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta x = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(u(x; y + \Delta y) + iv(x; y + \Delta y)) - (u(x; y) + iv(x; y))}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Сравнивая, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z)$$

Отсюда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

С учётом **У.К.Р.** производную $f'(z)$ можно находить по любой из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Таблица производных основных элементарных функций и **правила дифференцирования** сохраняются для ф.к.п.

Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической** (голоморфной) **в точке** z , если она дифференцируема (выполнены У.К.Р.) в некоторой окрестности этой точки.

Функция $f(z)$ называется **аналитической в области** D , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Точки аналитичности – **правильные** точки.

Точки, в которых нарушается аналитичность, – **особые** точки.

Дифференциал dw функции $w=f(z)$ в точке z -
главная часть её приращения $dw = f'(z) \cdot \Delta z$ или
$$dw = f'(z) \cdot dz$$

Действительная $u(x;y)$ и мнимая $v(x;y)$ части
аналитической функции – **гармонические функции**:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Здесь $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

Зная одну часть аналитической функции, можно найти другую (восстановить всю функцию с точностью до неопределенной константы).

Пример. Выяснить, является ли функция

$$u(x; y) = x^2 - y^2 + 2xy$$

действительной частью аналитической функции. Если является, то восстановить эту функцию.

Решение. Проверим функцию $u(x; y)$ на

гармоничность: $u'_x(x; y) = 2x + 2y; \quad u''_{xx}(x; y) = 2;$

$$u'_y(x; y) = -2y + 2x; \quad u''_{yy}(x; y) = -2;$$

$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 2 - 2 = 0;$ - т.е. $u(x; y)$ - гармоническая.

Найдём мнимую часть $v(x, y)$ искомой функции.

Из 1-го условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2y$;

Отсюда:

$$v(x; y) = \int (2x + 2y) dy = 2xy + y^2 + C(x);$$

Из 2-го условия Коши-Римана найдём $C(x)$:

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x = \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x); \text{ тогда } C'(x) = -2x;$$

$$C(x) = -x^2 + C; \quad v(x; y) = 2xy + y^2 - x^2 + C;$$

Итак, $f(z) = (x^2 - y^2 + 2xy) + i(2xy + y^2 - x^2 + C)$.

Интегрирование ф.к.п.

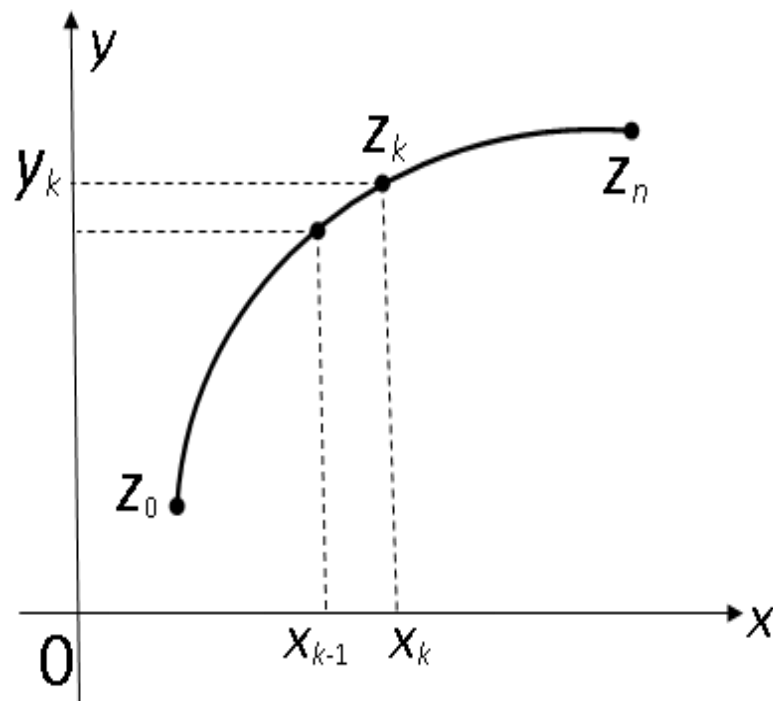
Пусть L – дуга гладкой кривой, $f(z)$ – функция на L .
Разобьём дугу на n частей точками z_0, z_1, \dots, z_n .

Выберем произвольно в каждой части дуги по точке
(пусть это будут z_0, z_1, \dots, z_n).

Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k ,$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.



Интегралом от функции $f(z)$ по кривой L называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшей из частей дуг, если этот предел существует:

$$\int_L f(z) dz = \lim_{\substack{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k.$$

Если кривая гладкая, а функция однозначная и непрерывная, то интеграл существует.

Вычисление его сводится к вычислению двух действительных криволинейных интегралов:

$$\begin{aligned}
 \int_L f(z) dz &= \int_L (u + iv)(dx + i dy) = \\
 &= \int_L u dx + i v dx + i v dy + i^2 u dy = \\
 &= \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy
 \end{aligned}$$

➤ Если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$, то

$$\int_L f(z) dz = \int_L (u(x, \varphi(x)) + i v(x, \varphi(x))) (1 + i \varphi'(x)) dx$$

➤ Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow z = z(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2, \text{ тогда}$$
$$\int_L f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) z'(t) dt$$

Основные свойства интеграла:

1. Линейность

$$\int_L (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_L f_1(z) dz + \int_L f_2(z) dz$$
$$\int_L k \cdot f(z) dz = k \cdot \int_L f(z) dz$$

2. Аддитивность (если $L = L_1 + L_2$), то

$$\int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz$$

3. Ориентируемость

$$\int_L f(z) dz = - \int_{L^-} f(z) dz$$

4. Оценка модуля (если на кривой $|f(z)| \leq M$), то

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \leq Ml, \text{ где } l - \text{длина кривой } L.$$

Пример 1. Вычислить интеграл по дуге L от точки $z=0$ до точки $z=4+2i$ вдоль линии $x = y^2$

$$\int_L z \operatorname{Im} \bar{z} dz$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_L z \operatorname{Im} \bar{z} dz &= \int_L (x + iy)(-y)(dx + i dy) = \\ &= \int_L (y^2 + iy)(-y)(d(y^2) + i dy) = \\ &= -\int_0^2 (y^3 + iy^2)(2y + i) dy = -\int_0^2 (2y^4 - 2y^3) dy - i \int_0^2 3y^3 dy = \\ &= -\frac{2}{5} y^5 + \frac{1}{2} y^4 \Big|_0^2 - i \frac{3}{4} y^4 \Big|_0^2 = -4,8 - 12i \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_C (z \cdot \bar{z}) dz$

где C – дуга окружности $|z|=1$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$).

Решение.

Положим $z = e^{i\varphi}$, тогда $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ и

$$\begin{aligned} \int_C (z \cdot \bar{z}) dz &= \int_0^\pi ie^{i\varphi} (e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi}) d\varphi = \\ &= i \int_0^\pi e^{i\varphi} d\varphi = \frac{i}{i} e^{i\varphi} \Big|_0^\pi = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz$

Решение. Под интегралом аналитическая функция.
Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz &= \left(z^3 + z^2 \right) \Big|_{1-i}^{2+i} = \\ &= (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = \\ &= 7 + 19i \end{aligned}$$

Интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования.

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области G ,
 C – замкнутый контур, лежащий в G .

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Формула Грина

$$\oint_C P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \\ = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$



Теорема Коши

Теорема Коши для односвязной области:

*Интеграл от аналитической функции
по любому замкнутому контуру
равен нулю.*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Доказательство.

$$\text{Имеем } \oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy);$$

Применим формулу Грина к каждому интегралу и используем У.К.Р.

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0;$$

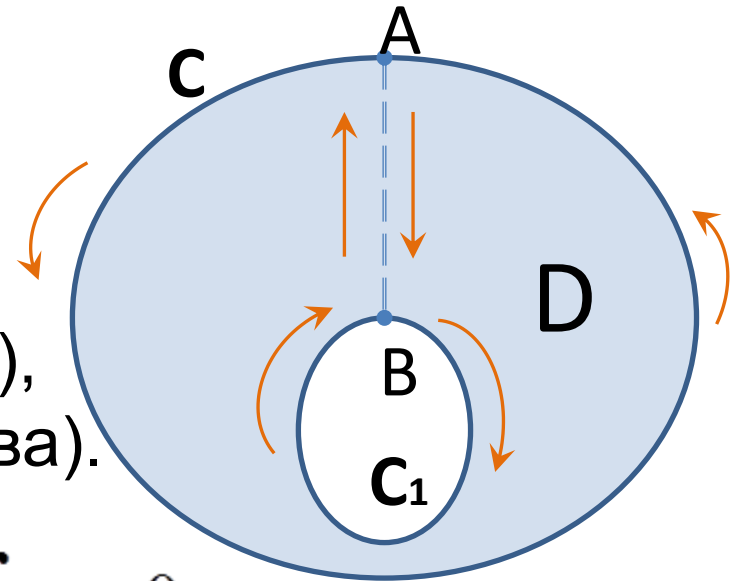
$$\oint_C (v dx + u dy) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Доказано.

Пусть $C \cup C_1$ -граница двусвязной области D .
 Разрез AB делает область D односвязной. Тогда
 по теореме Коши $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$

где $\Gamma = C^+ \cup AB \cup C_1^- \cup BA$,

C^+ -обход положительный
 (область остается слева),
 C_1^- -обход отрицательный (справа).



Тогда $\oint_{\Gamma} = \int_{C^+} + \int_{AB} + \int_{C_1^-} + \int_{BA} = \int_{C^+} + \int_{C_1^-} = 0$;

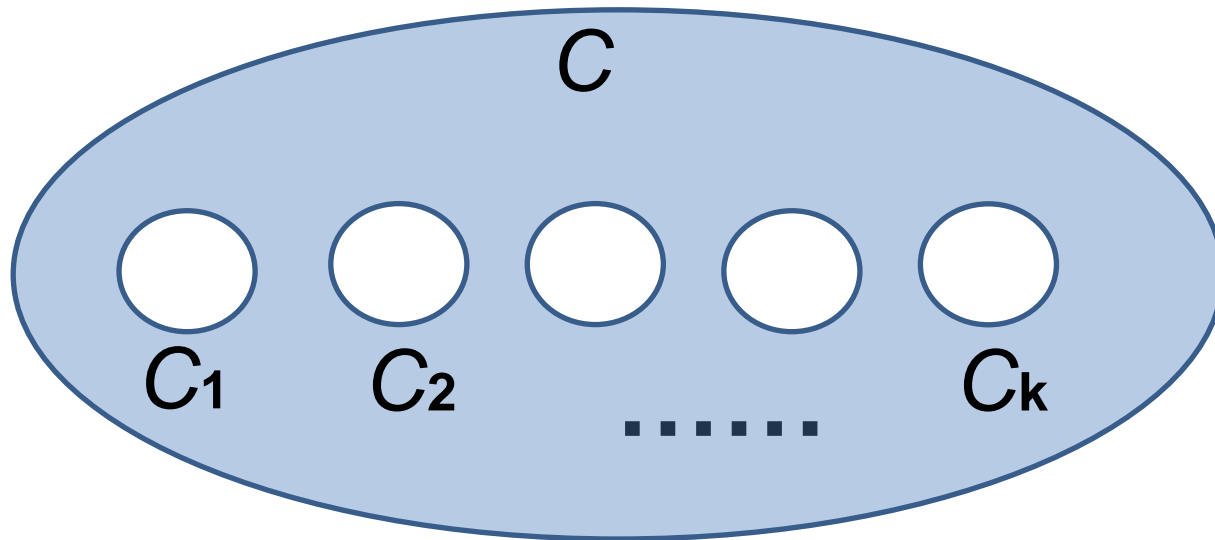
и $\int_{C^+} + \int_{C_1^-} = \int_{C^+} - \int_{C_1^+} = 0$; $\int_{C^+} f(z) dz = \int_{C_1^+} f(z) dz$;

Теорема Коши для многосвязной области:

Если \mathbf{C} - внешняя граница многосвязной области,
а C_1, C_2, \dots, C_n - внутренние границы, то

$$\oint_{\mathbf{C}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$

(обход всех контуров - положительный).

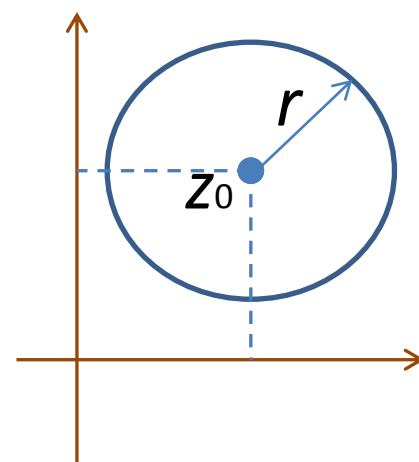


$$1. \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

2. При $n \neq 1$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^n} = \int \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{in\varphi}} = i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi = \frac{i}{i(1-n)} e^{i(1-n)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$3. \quad \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{при } n = 1 \end{cases}$$



Пусть $f(z)$ аналитическая в замкнутой односвязной области D с границей C ; z_0 – любая точка внутри D .

Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(обход контура C
положительный)

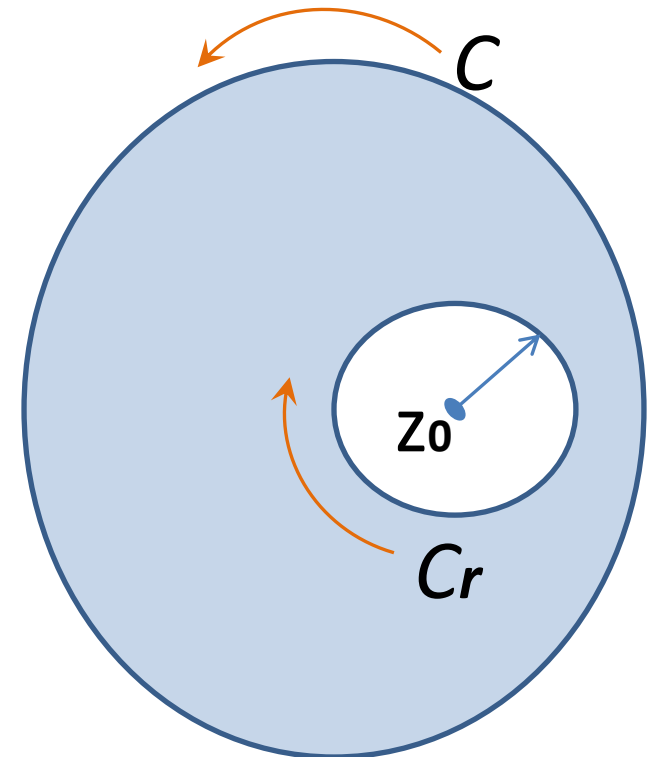
Интегральная формула Коши

Вывод формулы:

Построим окружность $|z - z_0| = r$,
лежащую полностью в D .

По теореме Коши

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$



Далее:

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{C_r} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \\
 &= f(z_0) \cdot \oint_{C_r} \frac{dz}{z - z_0} + \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \\
 &= f(z_0) \cdot 2\pi i + \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz;
 \end{aligned}$$

Но окружность $|z - z_0| = r$ можно выбрать как угодно малой и, используя свойство оценки модуля, имеем

$$\left| \oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_{C_r} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} dz \leq \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

Таким образом,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i + \underbrace{\oint_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz}_{\downarrow 0}$$

Окончательно,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Следствие. Дифференцируемая в точке z_0 функция имеет производные всех порядков, причём

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$